

O kilku problemach teorii sterowania stochastycznego i ich zastosowaniach

Łukasz Stettner

Instytut Matematyczny PAN

1. Jak zarządzać firmą ubezpieczeniową ? Kiedy wypłacać dywidendę?

Zagadnienie optymalnej dywidendy

$$X_{n+1} = X_n - U_n + Y_{n+1}, \quad X_0 = x$$

Y_n ciąg i.i.d. z rozkładem Q

$$V^U(x) = E \left\{ \sum_{i=0}^{\tau-1} e^{-\delta n} U_n \right\}, \quad \tau = \inf \{i \geq 0 : X_i < 0\}$$

$$V(x) = \sup_U V^U(x)$$

Oszacowania:

$$\frac{e^{-\delta} EY^+}{1-e^{-\delta} p_+} \leq w(x) := V(x) - x \leq \frac{e^{-\delta} EY^+}{1-e^{-\delta}}$$

$$p_+ := P \{Y_i \geq 0\}$$

Równanie Bellmana

$$V(x) = 0 \text{ dla } x < 0$$

$$V(x) = \sup_{0 \leq u \leq x} \left\{ u + e^{-\delta} \int_{-(x-u)}^{\infty} V(x-u+y) Q(dy) \right\}$$

$$= x + \sup_{0 \leq z \leq x} \left\{ -z + e^{-\delta} \int_{-z}^{\infty} V(z+y) Q(dy) \right\}$$

z $z = x - u$; dla $w(x) = V(x) - x$ mamy

$$w(x) = \sup_{0 \leq z \leq x} \left\{ -z + e^{-\delta} \int_{-z}^{\infty} w(z+y) Q(dy) + e^{-\delta} E(z + Y_1)^+ \right\}$$

strategie pasmowe i progowe De Finetti (1957), Avram Palmowski Pistorius (2007), Loeffen (2008)

2. Jak modelować dynamikę otaczających nas zjawisk ?



Andrey (Andrei) Andreyevich Markov
June 14, 1856 – July 20, 1922
wybitny matematyk z Petersburga

Procesy Markowa

procesy stochastyczne $(X_t, t = 0, 1, \dots,)$ lub $(X_t, t \geq 0)$

klasa procesów w których przyszłość zależy od teraźniejszości, ale nie zależy od przeszłości

$$P \{X_{t+h} \in A | F_t\} = P \{X_{t+h} \in A | X_t\}$$

własność Markowa to jedyność rozwiązań równania (zależności)

jednorodne w czasie procesy Markowa z operatorem prawdopodobieństw przejścia

$$P_t(x, A) = P \{X_t \in A | X_0 = x\}$$

3. Jak sterować procesami Markowa - optymalnie zatrzymywać?

Optymalne zatrzymywanie procesów Markowa

przy danej przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, F, (F_t), P)$

szukamy momentu Markowa τ tzn. takiej zmiennej losowej o wartościach w $[0, \infty)$, że

$\{\tau \leq t\} \in F_t$ dla każdego $t \in [0, \infty)$ by

$E \{F(X_\tau)\}$ było maksymalne

$$v(x) := \sup_{\tau} E_x \{F(X_\tau)\} = E_x \{F(X_{\hat{\tau}})\}$$

Przykłady problemów optymalnego zatrzymywania

zagadnienie najlepszego wyboru - problem sekretarki

strategia na egzamin

problem wynajmu mieszkania

amerykańska opcja kupna (call) $E \left\{ (S_\tau - K)^+ \right\}$

amerykańska opcja sprzedaży (put) $E \left\{ (K - S_\tau)^+ \right\}$

Zagadnienie najlepszego wyboru

losowo pojawiające się punkty (oferty) $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$

porządek: $a_3, a_9, a_2, a_8, a_4, a_1, a_6, a_5, a_{10}, a_7$

punkty maksymalne $x(0) = 1, x(1) = 5, x(2) = 7$

$$P\{x(i) = k\} = \frac{(k-1)!}{k!} = \frac{1}{k}$$

$$P(k, l) = P\{x(i+1) = l | x(i) = k\} = \frac{P\{x(i+1)=l, x(i)=k\}}{P\{x(i)=k\}}$$

$$P\{x(i+1) = l, x(i) = k\} = \frac{(l-2)!}{l!} = \frac{1}{(l-1)l}$$

$$P(k, l) = P\{x(i+1) = l | x(i) = k\} = \frac{k}{(l-1)l} \text{ dla } l > k$$

$$P(k, l) = 0 \text{ dla } l \leq k$$

Lemat 1. $(x(i))$ jest jednorodnym (w czasie) łańcuchem Markowa

Optymalna strategia

$q(k)$ prawd. najlepszego wyboru przy zatrzymaniu się w punkcie $x(i) = k$

$$q(k) = 1 - \sum_{l=k+1}^n p(k, l) = 1 - \sum_{l=k+1}^n \frac{k}{(l-1)l} = \frac{k}{n}$$

$$v(1) = \sup_{\tau} E_1 \{q(x(\tau))\} = \sup_{\tau} \sum_k P_1(x(\tau) = k) \frac{k}{n}$$

$$Pq(k) := \sum_l P(k, l)q(l) = \sum_{l=k+1}^n \frac{k}{l(l-1)} \frac{l}{n} = q(k) \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} + \dots + \frac{1}{n-1} \right)$$

$$Pq(n) = 0, \quad \frac{Pq(k)}{q(k)} = \frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} + \dots + \frac{1}{n-1} \downarrow \text{ gdy } k \text{ rośnie}$$

$$\Gamma = \{k : Pq(k) \leq q(k)\} = \{k_n, k_n + 1, \dots, n\}$$

Lemat 2. optymalna strategia: zatrzymać się gdy po raz pierwszy $x(i) \in \Gamma$.

Uzasadnienie

$$n = 1, q(1) = 1, Pq(1) = 0,$$

$$n = 2, Pq(2) = 0, Pq(1) = q(1), k_n = 1$$

$$n \geq 3, Pq(1) = q(1)\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n-1}\right) > q(1), k_n > 1$$

gdybyśmy zatrzymywali się wpadając do $k < k_n$ to strategia to strategia opóźniająca o krok nasze działanie dałaby wynik lepszy o $z(k)(Pq(k) - q(k)) > 0$

gdybyśmy zatrzymywali się wpadając do $k \geq k_n$ to strategia to strategia opóźniająca o krok nasze działanie dałaby wynik gorszy o $z(k)(Pq(k) - q(k)) < 0$

optymalna strategia: przepuścić $k_n - 1$ obiektów (sekretarek) a następnie wybrać pierwszy lepszy od pozostałych

$$k_n = \min \left\{ k : \frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} + \dots + \frac{1}{n-1} \leq 1 \right\}$$

$$\frac{1}{k_n} + \frac{1}{k_n+1} + \dots + \frac{1}{n-1} \leq 1 < \frac{1}{k_n-1} + \frac{1}{k_n} + \dots + \frac{1}{n-1}$$

Prawdopodobieństwo prawidłowego wyboru

s_m - prawd., że pierwszy po $k_n - 1$ przepuszczonych obiektach lepszy od wszystkich poprzednich będzie miał numer m

$$s_m = \frac{(m-2)!(k_n-1)}{m!} = \frac{k_n-1}{m(m-1)}$$

stąd p_n - prawdopodobieństwo optymalnego wyboru

$$p_n = \sum_{m=k_n}^n s_m q(m) = \sum_{m=k_n}^n \frac{k_n-1}{m(m-1)} \frac{m}{n} = \frac{k_n-1}{n} \left(\frac{1}{k_n-1} + \frac{1}{k_n} + \dots + \frac{1}{n-1} \right)$$

$$\ln \frac{n}{k} < \frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} + \dots + \frac{1}{n-1} < \ln \frac{n-1}{k-1}$$

$$\ln \frac{n}{k_n} \leq 1 < \ln \frac{n-1}{k_n-2}, \quad k_n \geq \frac{n}{e}, \quad k_n \leq \frac{n}{e} + \left(2 - \frac{1}{e}\right)$$

$$k_n \rightarrow \infty \text{ gdy } n \rightarrow \infty$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{k_n-1} + \frac{1}{k_n} + \dots + \frac{1}{n-1} \right) = 1$$

$$\text{i stąd } \lim_{n \rightarrow \infty} p_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k_n-1}{n} = \frac{1}{e} \approx 0.368$$

4. Co robić gdy nie mamy pełnej informacji ?

Historia problemu i jego motywacje

proces stanu (x_n)

proces obserwacji (y_n)

1801 C.F. Gauss, planetoida Ceres (Giuseppe Piazzi, Franz Xaver von Zach)

1809 C.F. Gauss, *Theory of the motion of the heavenly bodies moving about the sun in conic sections* - New York: Nachdruck Dover Publications 1963,

1821 C.F. Gauss, *Theoria combinationum observationum erroribus minimis obnoxiae*, Gesammelte Werke, Bd.4. Göttingen

1941 A.N. Kolmogorov, *Intiergrirowanije i ekstrapolirowanije stacjonarnych sluczajnych posledowatelnostiej*, Izv. AN SSSR, t. 5 no.1

1949 N. Wiener, *Extrapolation, interpolation and smoothing of stationary time series* - New York, Wiley

Liniowy proces filtracji

Thorvald Nicolai Thiele, Peter Swerling 1958, 1959 R.C. Bucy, 1960 Rudolf E. Kalman, R.E. Kalman and R.C. Bucy 1961

liniowa filtracja $\bar{x}_n := E[x_n | y_1, \dots, y_n]$

przez warunkową wartość oczekiwaną $E[X|Y]$ rozumiemy projekcję (rzut) zmiennej X na przestrzeń $L^2(\Omega, \sigma\{Y\}, P)$ (zakładając cicho, że $X \in L^2(\Omega, F, P)$)

filtr Kalmana Bucy'ego (w wersji uogólnionej przez szkołę rosyjską R. Liptser i A. Shiryaev lata 70-te)

ciągi warunkowo normalne

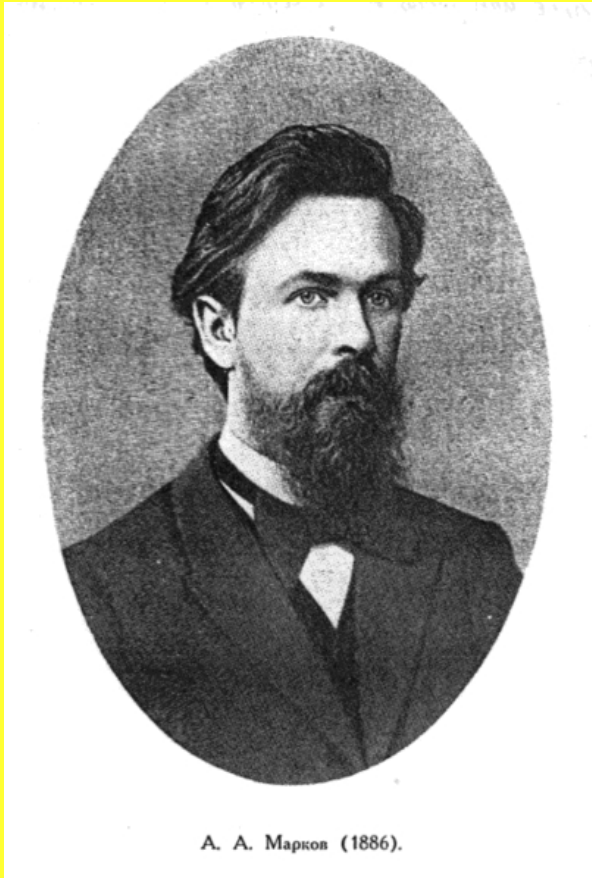
$$x_{n+1} = a(y_n)x_n + b(y_n) + c(y_n)w_n$$

$$y_{n+1} = d(y_n)x_n + e(y_n) + f(y_n)v_n$$

$$(w_n), (v_n) \text{ i.i.d. } N(0, 1)$$

$\bar{x}_n, E[(x_n - \bar{x}_n)(x_n - \bar{x}_n)^T | y_1, \dots, y_n]$ dane rekurencyjnymi równaniami

Procesy Markowa



Andrey (Andrei) Andreyevich Markov (14 czerwca 1856 - 20 lipca 1922)

(x_n) , $P(x, A) = P\{x_1 \in A \mid x_0 = x\}$ prawdopodobieństwo przejścia

$$Pf(x) := \int_{E_0} f(x')P(x, dx')$$

Miary niezmiennicze dla procesów Markowa

μ jest miarą niezmienniczą dla $P(x, dy)$ jeżeli

$$\mu(A) = \int_{E_0} P(x, A) \mu(dx) = P(\mu, A) \text{ dla } A \in \mathcal{E}_0$$

miary niezmiennicze opisują zachowanie się procesu, gdy czas dąży do nieskończoności i operatora $P^n(x, A)$

$$(P^n(x, A) \rightarrow \mu(A) \text{ lub } \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n P^n(x, A) \rightarrow \mu(A) \text{ gdy } n \rightarrow \infty)$$

miara niezmiennicza - miara równowagi

N. N. Bogoliubov and N. M. Krylov (1937). "La theorie generalie de la mesure dans son application a l'etude de systemes dynamiques de la mecanique non-lineaire"

Opis modelu i jego własności - proces stanu

$(x_n), (y_n)$ procesy o wartościach w przestrzeni polskiej E_0 and E

(x_n) , proces stanu (nieobserwowany, ukryty) - proces Markowa o prawdopodobieństwie przejścia $P(x_{n-1}, dx')$

(y_n) , proces obserwacji $P_1^{x_n}(y_{n-1}, dy')$

(np. $y_n = h(x_n) + w_n$ lub $y_n = h(x_n, y_{n-1}) + w_n$)

$X^n = \sigma\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$, $Y^n = \sigma\{y_0, y_1, \dots, y_n\}$,

$$P\{x_{n+1} \in A \mid X^n, Y^n\} = P(x_n, A), \quad (1)$$

Opis modelu i jego własności - proces obserwacji

Przypadek szczególny: $y_n = h(x_n, w_n)$

$$P \{y_{n+1} \in B \mid X^{n+1}, Y^n\} = \int_B r(x_{n+1}, y') \eta(dy') \quad (2)$$

Przypadek ogólny: $y_{n+1} = h(y_n, x_{n+1}, w_{n+1})$

$$P \{y_{n+1} \in B \mid X^{n+1}, Y^n\} = P_1^{x_{n+1}}(y_n, B) = \int_B r(x_{n+1}, y_n, y') \eta(dy') \quad (3)$$

para $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ jest procesem Markowa z operatorem prawdopodobieństw przejścia

$$Tf(x, y) = \int_{E_0} \int_E f(x', y') P_1^{x'}(y, dy') P(x, dx') \quad (4)$$

Proces nieliniowej filtracji - przypadek szczególny

$\pi_n(A) = P\{x_n \in A \mid Y^n\} = E\{1_A(x_n) \mid Y^n\}$ P a.s. dla $A \in \mathcal{E}_0$ informacja o procesie (x_n) na podstawie obserwacji Y^n

$\pi_0(A) = \nu(A)$ rozkład początkowy procesu (x_n) , π_n to proces o wartościach w przestrzeni miar probabilistycznych $\mathcal{P}(E_0)$ nad E_0

$$M(y, \nu)(A) = \frac{\int_A r(x', y) P(\nu, dx')}{\int_{E_0} r(x', y) P(\nu, dx')} := \frac{N(y, \nu)(A)}{N(y, \nu)(E_0)}$$

.

Mamy, że $\pi_{n+1}(A) = M(y_{n+1}, \pi_n)(A)$, co jest równaniem rekurencyjnym

(π_n) jest procesem Markowa z prawdopodobieństwem przejścia

$$\Pi F(\nu) = \int_{E_0} \int_E F(M(y, \nu)) r(x, y) dy P(\nu, dx)$$

Proces nieliniowej filtracji - przypadek ogólny

$$M(y, y', \nu)(A) = \frac{\int_A r(x', y, y') P(\nu, dx')}{\int_{E_0} r(x', y, y') P(\nu, dx')} := \frac{N(y, y', \nu)(A)}{N(y, y', \nu)(E_0)}.$$

$$\rho(dx, dy) = p_\rho(y, dx)\rho(E_0, dy)$$

$$\pi_0^\rho(A) = p_\rho(y_0, A)$$

$$\pi_n^\rho(A) = M(y_{n-1}, y_n, \pi_{n-1}^\rho)(A)$$

(5)

$$\pi_n^\rho(A) = P\{x_n \in A \mid Y^n\} \quad P \text{ a.s.}$$

Para $\begin{pmatrix} \pi_n^\rho \\ y_n \end{pmatrix}$ tworzy proces Markowa z operatorem

$$\Pi F(\nu, y) = \int_{E_0} \int_E F(M(y, y', \nu), y') P_1^x(y, dy') P(\nu, dx) \quad (6)$$

Główny problem

w przypadku szczególnym: ergodyczność (istnienie jedynej miary niezmienniczej) dla procesu (π_n) ; w przypadku ogólnym: ergodyczność pary $\begin{pmatrix} \pi_n^\rho \\ y_n \end{pmatrix}$,

H.Kunita (1971), L. Stettner (1989), H. Kunita (1991), A.G. Bhatt, A. Budhiraja, R.L. Karandikar (2000)

T. Kaijser (1975), P. Baxendale, P. Chigansky, R. Liptser (2004), A. Budhiraja (2003), Di Masi, L.S. (2005), F. Le Gland, N. Oudiane (2004), V. Tadic, A. Doucet (2005), M.L. Kleptsyna, A.Yu. Veretennikov (2007)

Twierdzenie (nieprawdziwe). Załóżmy, że istnieje jedyna miara niezmiennicza μ dla procesu stanu (x_n) . Wtedy proces nieliniowej filtracji (π_n) ma dokładnie jedną miarę niezmienniczą wtedy i tylko wtedy gdy zachodzi warunek

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int |E_x \{f(x_n)\} - \mu(f)| \mu(dx) = 0.$$

Gdzie był błąd?

w przejściu granicznym, gdzie $Y_{-\infty}^n = \sigma \{ \dots, y_{-n}, y_{-n+1}, \dots, y_0, y_1, \dots, y_n \}$

$$X_{-\infty}^m = \sigma \{ \dots, x_{-n}, x_{-n+1}, \dots, \dots, x_m \}$$

$$\lim_{m \rightarrow -\infty} E \{ \phi(x_n) | Y_{-\infty}^n \vee X_{-\infty}^m \} \neq E \{ \phi(x_n) | Y_{-\infty}^n \},$$

$$X_{-\infty}^{-\infty} = \{ \emptyset, \Omega \}, \text{ (z tw. Levy'ego } E \{ Z | X_{-\infty}^m \} \rightarrow E \{ Z | X_{-\infty}^{-\infty} \})$$

Kontrprzykład (T. Kaijser (1975), P. Baxendale, P. Chigansky, R. Liptser (2004))

$E_0 = \{1, 2, 3, 4\}$, $E = \{0, 1\}$ macierz prawdopodobieństw przejścia procesu (x_n)

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$E_{01} = \{1, 3\}, E_{02} = \{2, 4\}$$

$$y_n = 1_{E_{01}}(x_n)$$

$$r(x, 1) = 2 \text{ for } x \in E_{01}, r(x, 1) = 0 \text{ for } x \in E_{02}$$

$$r(x, 0) = 2 \text{ for } x \in E_{02}, r(x, 0) = 0 \text{ for } x \in E_{01}$$

$$\text{with } \eta(0) = \eta(1) = \frac{1}{2}.$$

$$P(x, E_{01}) = \frac{1}{2}, (y_n) \text{ i.i.d. } P\{y_n = 0\} = P\{y_n = 1\} = \frac{1}{2}$$

$$\left\{ \begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \\ 1 - \alpha \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha \\ 0 \\ 1 - \alpha \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 - \alpha \\ 0 \\ \alpha \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 - \alpha \\ 0 \\ \alpha \end{bmatrix} \right\}$$

dla $\alpha \in (0, 1)$ mamy kontinuum zbiorów niezmienniczych i miar niezmienniczych.

Dlaczego zadziałał kontrprzykład?

Jeżeli $y_n = 1_{E_{01}}(x_n) + w_n$, gdzie (w_n) i.i.d. np. $N(0, 1)$ to istnieje jedyna miara niezmiennicza dla (π_n) .

Hipoteza: G.B. Di Masi Stettner (2005) Istnienie jedynej miary niezmienniczej dla (x_n) plus równoważność operatorów obserwacji

$$\int r(x, y) \eta(dy),$$

$(P_1^x(y, \cdot) = \int r(x, y, y') \eta(dy'))$ w przypadku ogólnym) dla $x \in E_0$, (również dla $y \in E$ w przypadku ogólnym) implikuje istnienie jedynej miary niezmienniczej dla operatora Π , czyli procesu filtracji (π_n) ,

$\left(\begin{pmatrix} \pi_n^\rho \\ y_n \end{pmatrix} \right)$ w przypadku ogólnym) (np. $y_{n+1} = h(y_n, x_{n+1}) + w_{n+1}$, z (w_n) i.i.d. $N(0, 1)$)

5. Modelowanie ryzyka w finansach i nie tylko

Ryzyko w podejściu historycznym - teoria Markowitza

$S_i(t)$ cena i -tej akcji w chwili t ($i = 1, 2, \dots, d$)

podejście statyczne $t = 0, 1$

stopa zwrotu i -tej akcji

$$\zeta_i := \frac{S_i(1) - S_i(0)}{S_i(0)} = \frac{S_i(1)}{S_i(0)} - 1$$

oczekiwana stopa zwrotu i -tej akcji $\mu_i := E\zeta_i$

$$\mu = [\mu_1, \dots, \mu_d]^T, \quad \zeta := [\zeta_1, \dots, \zeta_d]^T,$$

Σ macierz kowariancji

$$\Sigma = E \left\{ (\zeta - \mu) (\zeta - \mu)^T \right\} = (\Sigma^{ij})$$

$\theta := [\theta_1, \dots, \theta_d]^T$, θ_i część kapitału zainwestowana w i -ta akcję

losowa stopa zwrotu portfela $R(\theta)$ jest równa $\theta^T \zeta$ ponieważ: jeżeli x jest kapitałem początkowym to

$\frac{x\theta_i}{S_i(0)}$ jest ilością i -tych akcji w chwili 0

$\frac{x\theta_i}{S_i(0)}S_i(1)$ jest wartością kapitału zainwestowanego w i -tą akcję w chwili 1

$$R(\theta) = \frac{\sum_{i=1}^d \frac{x\theta_i}{S_i(0)}S_i(1) - x}{x} =$$

$$\sum_{i=1}^d \frac{\theta_i}{S_i(0)}S_i(1) - 1 = \sum_{i=1}^d \frac{\theta_i}{S_i(0)}(S_i(1) - S_i(0)) = \sum_{i=1}^d \theta_i \zeta_i$$

wariancja stopy zwrotu portfela

$$Var(R(\theta)) = \theta^T \Sigma \theta$$



Harry Max Markowitz ur. 1927, nagroda Nobla
1990

Problem Markowitza

zmaksymalizować oczekiwaną stopę zwrotu portfela

$$E \{R(\theta)\} = \theta^T \mu$$

przy równoczesnej minimalizacji

wariancji stopy zwrotu portfela rozumianej jako miara ryzyka

$$Var(R(\theta)) = \theta^T \Sigma \theta.$$

"Portfolio Selection" The Journal of Finance, Vol. 7, No. 1. (Mar., 1952), pp. 77-91

Markowitz, H., Portfolio Selection Efficient Diversification of Investments, Wiley, 1959.

Problemy jednokryterialne

a) zmaksymalizować

$$F(E\{R(\theta)\}, Var(R(\theta))) = E\{R(\theta)\} - \frac{1}{2}\lambda Var(R(\theta)) = \theta^T \mu - \frac{1}{2}\lambda \theta^T \Sigma \theta$$

b) zmaksymalizować funkcjonął wrażliwy na ryzyko

$$g(\lambda) = \ln E\{\exp\{-\lambda X\}\}$$

dla $X = R(\theta)$

$$g'(\lambda) = \frac{E\{-Xe^{-\lambda X}\}}{E\{e^{-\lambda X}\}} \quad g''(\lambda) = \frac{E\{X^2 e^{-\lambda X}\}E\{e^{-\lambda X}\} - (E\{-Xe^{-\lambda X}\})^2}{(E\{e^{-\lambda X}\})^2}$$

stąd ze wzoru Taylora dla $g(\lambda)$ mamy

$$\frac{-1}{\lambda}g(\lambda) = E\{X\} - \frac{1}{2}\lambda Var(X) + reszta(\lambda), \text{ i.e.}$$

$$F_\lambda(R(\theta)) = \frac{-1}{\lambda} \ln E\{\exp\{-\lambda R(\theta)\}\} = E\{R(\theta)\} - \frac{1}{2}\lambda Var(R(\theta)) + reszta(\lambda)$$

Monetarne miary ryzyka

pozycja finansowa $X : \Omega \rightarrow R$

$\mathcal{X}$ rodzina pozycji finansowych

$\rho : \mathcal{X} \rightarrow R$ jest monetarną miarą ryzyka gdy:

- jeżeli $X \leq Y$ to $\rho(X) \geq \rho(Y)$ (monotoniczność)
- jeżeli $m \in R$ to $\rho(X + m) = \rho(X) - m$ (pieniężna addytywność)

własności:

$$\rho(X + \rho(X)) = 0$$

$$(\rho(0) = 0 \text{ (normalizacja)})$$

$$|\rho(X) - \rho(Y)| \leq \|X - Y\|$$

monetarna miara ryzyka jest **wypukła** gdy

$$\rho(\lambda X + (1 - \lambda)Y) \leq \lambda\rho(X) + (1 - \lambda)\rho(Y) \text{ dla } \lambda \in [0, 1]$$

(dywersyfikacja nie zwiększa ryzyka)

wypukła miara ryzyka jest **koherentną miarą ryzyka** gdy

jeżeli $\lambda \geq 0$ to $\rho(\lambda X) = \lambda\rho(X)$ (dodatnia jednorodność)

własności koherentnej miary ryzyka:

$$\rho(0) = 0$$

$$\rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y) \text{ (nadaddytywność)}$$

Wartość narażona na ryzyko

$$VaR_\alpha(X) = \inf \{m \in R \mid P\{m + X < 0\} \leq \alpha\}$$

α kwantyle: górny

$$q_\alpha^+(X) := \inf \{x \in R : P\{X \leq x\} > \alpha\} = \sup \{x \in R : P\{X < x\} \leq \alpha\}$$

dolne kwantyle

$$q_\alpha^-(X) := \inf \{x \in R : P\{X \leq x\} \geq \alpha\} = \sup \{x \in R : P\{X \leq x\} < \alpha\}$$

α przedział kwantyli $[q_\alpha^-(X), q_\alpha^+(X)]$

$$P\{-X \leq m\} \geq 1 - \alpha \text{ and } P\{X < -m\} \leq \alpha$$

$$\text{stąd: } VaR_\alpha(X) = q_{1-\alpha}^-(-X) = -q_\alpha^+(X)$$

$VaR_\alpha(X)$ jest monetarną miarą ryzyka ale nie jest wypukłą miarą. Zwykle $\alpha \in [0, 0.05]$.

Przykład (Embrechts)

100 i.i.d. pożyczek po 100 jednostek z oprocentowaniem 2%, podlegających ryzyku niewypłacalności 1%

rozważamy dwa portfele: X_1 składający się ze 100 niezależnych pożyczek po 100 jednostek

X_2 jedna pożyczka wielkości 100×100 jednostek

mamy $X_1 = \sum_{i=1}^{100} Y_i$ i $X_2 = 100Y_1$, gdzie $P\{Y_i = -100\} = 0.01$, $P\{Y_i = 2\} = 0.99$ i

$$VaR_{5\%}(X_1) > VaR_{5\%}(X_2)$$

to jest $VaR_{5\%}(\sum_{i=1}^{100} Y_i) > \sum_{i=1}^{100} VaR_{5\%}(Y_i) = -200$

rzeczywiście $q_{0.05}^+(Y_i) = 2$, i $q_{0.05}^+(\sum_{i=1}^{100} Y_i) = -1.64 \cdot 101.4887 + 98 < 2$ stosując aproksymację rozkładem normalnym.

Warunkowy VaR

X całkowalna ciągła zmienna losowa (expected shortfall, average value at risk)

$$CVaR_\alpha(X) = E \{-X | X + VaR_\alpha(X) \leq 0\}$$

$CVaR_\alpha$ jest koherentną miarą ryzyka

można pokazać, że

$$CVaR_\alpha(R(\theta)) = \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha VaR_\beta d\beta$$

Koherentne miary ryzyka

$$\rho_m(X) = - \int_0^1 q_u^+(X) m(du)$$

gdzie m miara probabilistyczna na $(0, 1)$. ρ jest miara monotoniczną, pieniądze addytywną addytywną i dodatnio jednorodną.

Przykłady:

1. $VaR_\alpha(X) = -q_\alpha^+(X)$, for $m = \delta_\alpha$,
2. expected shortfall (conditional VaR): $ES_\alpha(X) = \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha VaR_u(X) du$, dla m jednostajnego rozkładu na $(0, \alpha)$,
3. spektralne miary ryzyka: $\rho_\phi(X) = \int_0^1 VaR_u(X) \phi(u) du$, z $m(du) = \phi(u) du$, gdzie $\phi : [0, 1] \rightarrow [0, \infty)$ jest gęstością na $[0, 1]$ i $u \mapsto \phi(u)$ jest malejąca

Twierdzenie ρ_m podaddytywna wtedy i tylko wtedy gdy jest spektralną miarą ryzyka.

Estymatory ryzyka z danych historycznych

$$\hat{\rho}^h(X) = \rho(F_X^{emp})$$

dla $\rho_m(X) = -\int_0^1 q_u^+(X)m(du)$ mamy

$$\hat{\rho}^h(X) = -\sum_{i=1}^n x_{(i)}m\left(\left(\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right]\right) \text{ where } x_{(i)} \text{ is the } i\text{-th element of } X = (x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Przykłady:

$$1. \hat{V}aR_\alpha^h(X) = -x_{([n\alpha]+1)}$$

$$2. \hat{E}S_\alpha^h(X) = -\frac{1}{n\alpha} \left(\sum_{i=1}^{[n\alpha]} x_{(i)} + x_{([n\alpha]+1)}(n\alpha - [n\alpha]) \right)$$

$$3. \hat{\rho}_\phi^h(X) = -\sum_{i=1}^n x_{(i)} \int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} \phi(u) du$$

Problem: zgodność estymatorów ryzyka

Zgodność estymatorów ryzyka

estymator ryzyka jest zgodny **zgodny** gdy dla dystrybuanty F gdy

$\hat{\rho}(X_1, X_2, \dots, X_n) \rightarrow \rho(F)$, gdy $n \rightarrow \infty$ p.p. dla i.i.d. ciągu z.l. X_i z dystrybuantą F

$V\hat{a}R_{\alpha}^h(F)$ jest zgodny dla F takiego, że $q_{\alpha}^{+}(F) = q_{\alpha}^{-}(F)$

$\hat{E}S_{\alpha}^h(F)$ i $\hat{\rho}_{\phi}^h(X)$ są zgodne jako funkcje liniowe statystyk pozycyjnych (van Zwet 1980)

odległość Levy'ego między dystrybuantami :

$$d(F, G) = \inf \{ \epsilon > 0 : F(x - \epsilon) - \epsilon \leq G(x) \leq F(x + \epsilon) + \epsilon, \text{ for } x \in R \}$$

$\mathcal{L}_n(\hat{\rho}, G)$ jest dystrybuantą estymatora ρ w oparciu o próbkę $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ z.l. i.i.d. z dystrybuanta G

Odporność estymatorów

$\mathcal{C}$ rodzina dystrybuant

Definicja. Estymator ryzyka $\hat{\rho}$ jest $\mathcal{C}$ odporny w F gdy dla dowolnego $\epsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ i $N_0 \geq 1$ takie, że dla wszystkich $G \in \mathcal{C}$ mamy

$d(F, G) \leq \delta$ implikuje $d(\mathcal{L}_n(\hat{\rho}, G), \mathcal{L}_n(\hat{\rho}, F)) \leq \epsilon$ dla $n \geq n_0$.

Twierdzenie. (Cont, Deguest, Scandolo 2010) Niech ρ będzie miarą ryzyka i $F \in \mathcal{C}$. Jeżeli $\hat{\rho}^h$ - estymator historyczny ρ zgodny z ρ dla każdego $G \in \mathcal{C}$ to następujące warunki są równoważne

1. ograniczenie ρ do $\mathcal{C}$ jest ciągłe w F (ze względu na metryk Levy'ego)
2. $\hat{\rho}^h$ jest $\mathcal{C}$ odporny w F .

Wniosek Jeżeli ρ jest ciągły w $\mathcal{C}$ to $\hat{\rho}^h$ jest $\mathcal{C}$ odporny dla dowolnego $F \in \mathcal{C}$.

(we use Glivienko-Cantelli theorem)

Ciągłość miar ryzyka

Miara ryzyka $\rho_m(X) = -\int_0^1 q_u^+(X)m(du)$, zaś $\mathcal{D}_\rho$ przestrzeń dystrybuant dla których ρ_m jest zdefiniowane, i

$$\mathcal{A}_m = \{\alpha \in [0, 1] : m\{\alpha\} > 0\}$$

Twierdzenie (Huber 1981). Jeżeli nośnik m nie zawiera 0 ani 1 to ρ_m jest ciągła dla dowolnego $F \in \mathcal{D}_\rho$ takiego, że $q_\alpha^+(F) = q_\alpha^-(F)$ dla $\alpha \in \mathcal{A}_m$. W przeciwnym wypadku ρ_m nie jest ciągła dla dowolnego $F \in \mathcal{D}_\rho$.

Wniosek $V\hat{a}R_\alpha^h(F)$ jest $\mathcal{C}_\alpha$ odporna dla dowolnego $F \in \mathcal{C}_\alpha$ gdzie

$$\mathcal{C}_\alpha = \{F \in \mathcal{D} : q_\alpha^+(F) = q_\alpha^-(F)\}$$

$m(du) = \phi(u)du$, $\phi \in L^q$ to ρ_ϕ jest zdefiniowane w $\mathcal{D}^p$ - zbiór dystrybuant ze skończonym left tail p moment ($\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$)

Wniosek Dla dowolnego $F \in \mathcal{D}^p$ historyczny estymator ρ_ϕ jest $\mathcal{D}^p$ odporny w F wtedy i tylko wtedy gdy dla pewnego $\epsilon > 0$ $\phi(u) = 0$ dla wszystkich $u \in (0, \epsilon) \cup (1 - \epsilon, 1)$ i.e. ϕ znika w otoczeniu 0 i 1.

Odporność estymatorów kontynuacja

Wniosek. Historyczny estymator dla dowolnej spektralnej miary ryzyka ρ_ϕ zdefiniowany na $\mathcal{D}^p$ nie jest $\mathcal{D}^p$ - odporny w $F \in \mathcal{D}^p$. W szczególności, historyczny estymator ES_α nie jest $\mathcal{D}^1$ - odporny dla $F \in \mathcal{D}^1$.

jednakże historyczny estymator

$\frac{1}{\alpha_2 - \alpha_1} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} VaR_u(F) du$ jest $\mathcal{D}^1$ odporny.